SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A X-a

Subiectul 1. Dacă $a > b$, atunci pentru orice $a > c > b$, $f(x) = \log_c x$ verifică cele două condiţii, deoarece $\log_c b < 1 < \log_c a$ ....3 puncte

Dacă f are cele două proprietăţi, atunci, deoarece $\log_a, \log_b$ sunt strict crescătoare şi deci $g \circ \log_a, -h \circ \log_b$ sunt strict crescătoare, rezultă şi $d : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $d(x) = g(\log_a x) - h(\log_b x)$ strict crescătoare ....2 puncte

Dar $d(x) = \log_b x - \log_a x = \dfrac{\lg \frac{a}{b}}{\lg a \lg b} \lg x$ şi cum $\lg a > 0, \lg b > 0$ şi lg este strict crescătoare, rezultă $\lg \frac{a}{b} > 0$, deci $a > b$. ....2 puncte

Subiectul 2. Pentru $x = y = z$ avem $(f(x,x))^3 = 1$ deci $f(x,x) = 1$ pentru $x \in \mathbf{Z}$. Pentru $y = z$ avem atunci $f(x,y)f(y,x) = 1$ pentru orice $x, y \in \mathbf{Z}$.

Atunci $f(x,z) = f(x,y)f(y,z) = \frac{f(x,y)}{f(z,y)}$ pentru $x, y, z \in \mathbf{Z}$. ......2 puncte

Rezultă $2 = f(x+1, x) = \frac{f(x+1,y)}{f(x,y)}$, deci

$$\frac{f(x+1,y)}{2^{x+1}} = \frac{f(x,y)}{2^x},\ x \in \mathbf{Z}.$$

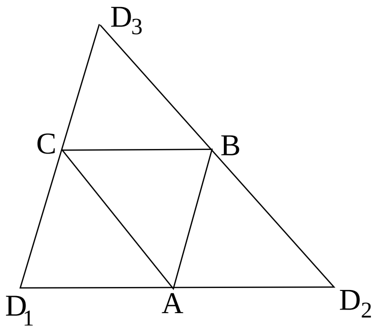
Prin urmare raportul $\frac{f(x,y)}{2^x}$ este constant ....2 puncte

În particular $(x = y)$ $\frac{f(x,y)}{2^x} = \frac{f(y,y)}{2^y} = \frac{1}{2^y}$ de unde $f(x,y) = 2^{x-y}$ pentru orice $x, y \in \mathbf{Z}$. ....2 puncte

Verificare ....1 punct

Subiectul 3. Existenţa lui O este uşor de demonstrat dat fiind faptul că este intersecţia planelor mediatoare a trei muchii, rezultând astfel că el este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Fie O_1 proiecţia lui O pe planul (ABC) şi O_2 proiecţia lui O pe planul (BCD). Cum $OO_1 = OO_2$ rezultă că O_1 şi O_2, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi BCD au aceleaşi raze. Rezultă astfel că toate cercurile circumscrise feţelor au aceleaşi raze...1 punct

Demonstrăm că tetraedrul este echifacial.



Desfăşurăm tetraedrul în planul (ABC), astfel încât punctul D devine pe rând D_1, D_2, D_3. Din faptul că două coarde egale în cercuri egale subîntind unghiuri de măsuri egale, obţinem $\angle BAC = \angle D_3, \angle D_3CB = \angle BAD_2, \angle CBD_3 = \angle D_1AC$, ceea ce arată că punctele D_1, A, D_2 sunt coliniare. Analog, rezultă că B se află pe D_2D_3 şi C pe D_1D_3. . . . . 3 puncte

Rezultă de aici că triunghiurile ce sunt rabatatele feţelor tetraedrului sunt congruente . . . . 1 punct

Însumând volumele tetraedrelor $MABC, MBCD, MACD, MABD$ obţinem volumul tetraedrului $ABCD$. Cum planele bazelor acestor tetraedre au aceeaşi arie, rezultă că suma distanţelor lui M la feţe este constantă.

. . . . 2 puncte

Subiectul 4. Fie $y = \max(Im\, f)$, deci $f(y) \leq y$. Atunci $y^3 - 6y^2 + 12y - 6 \leq y$ sau $(y-1)(y-2)(y-3) \leq 0$, de unde $y \in \{1,2,3\}$, deci $Im\, f \subset \{1,2,3\}$. . . . . 3 puncte

În plus $f(z) = z$ pentru $z \in Im\, f$ şi $f(x)$ este un element arbitrar din $Im\, f$ pentru $x \notin Im\, f$ . . . . 1 punct

Considerând pe cazuri numărul de elemente din $Im\, f$, avem:

- pentru $|Im\, f| = 1$, obţinem $C_3^1 = 3$ funcţii;
- pentru $|Im\, f| = 2$, obţinem $C_3^2 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$ funcţii;
- pentru $|Im\, f| = 3$, obţinem $C_3^3 \cdot 3^{n-3} = 3^{n-3}$ funcţii;

deci în total $3 + 3 \cdot 2^{n-2} + 3^{n-3}$ funcţii. . . . . 3 puncte